Risikoabschätzung mit Fuzzy Methoden

U. Wagner
Institut für Programmstrukturen und Datenorganisation, Universität Karlsruhe

Zusammenfassung

Risiko bedeutet „mit einem Vorhaben, Unternehmen verbundenes Wagnis“. Daher sind die Grundlagen zur Bewertung von Risiken immer vage, unsicher und unvollständig. Modelle zur Risikobewertung müssen demnach in der Lage sein, nicht exakte Zusammenhänge zu analysieren. Methoden, wie sie beispielsweise in der Versicherungswissenschaft zum Abschätzen von Erdbeben- oder Hochwasserschäden eingesetzt werden, modellieren Risiko mit Hilfe der Statistik. Dazu müssen Verteilungsannahmen getroffen werden, die häufig statistisch nicht fundiert sind. Möglichkeitsverteilungen verzichten auf Verteilungsannahmen. Sie basieren stattdessen direkt auf den Schätzungen und sind somit minimal spezifiziert. Da Wahrscheinlichkeitsverteilungen eine Untermenge von Möglichkeitsverteilungen sind, können mit fuzzy Methoden beide verknüpft werden, sodass dieses Verfahren eine Verallgemeinerung mehrstufiger Wahrscheinlichkeitsmodelle darstellt. Der Vorteil ist eine höhere Transparenz bei der Entscheidungsfindung. Vage Information wird nicht hinter einer Zahl versteckt, sondern wird mit einer Menge beschrieben. Konkrete Werte, wie sie beispielsweise zur Berechnung von Prämien nötig sind, lassen sich aus dieser Menge ableiten.

Abstract

Risk describes the potential hazard associated with an action or a business. The basis for the quantification of risk therefore is vague, uncertain and incomplete, otherwise there would be evidence and no risk. Models for this kind of analysis has to incorporate this uncertainty. The standard methods for risk assessment of natural hazards in the financial sector are statistical methods. They make assumptions on distributions, which are not backed up by statistics. Possibility distributions do not need these assumptions. They use interval estimates and are minimal specific. Probability distributions are a subset of possibility distributions. We can combine them with fuzzy calculations. The advantage is an extended transparency of the modeling process. This is especially helpful for decision makers, because the uncertainty and vagueness of the analysis is not covered by a single number. The premium calculation of insurance companies is given as an example.

Motivation

Zum quantitativen Abschätzen von Risiken werden Daten analysiert, die einer großen Ungenauigkeit unterliegen. Häufig werden Verteilungsannahmen getroffen, die nicht zu rechtfertigen sind. Wenn man sich die Datenlage im Bereich Erdbeben in Deutschland anschaut, findet man im historischen Katalog der Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe in Hannover nur wenige Einträge. Im Zeitraum 800 bis 1998 gibt es genau 224 sogenannte Schadensbeben. Dies sind Beben mit einer Intensität größer als VI. Möchte man diese Daten regional auf die wichtigsten Bebenzentren (Kölner Bucht, Nordalpen, Vogtland) verteilen, ist die Menge nicht geeignet, um punktgenau Schätzungen für Wiederkehrperioden je Gebiet anzugeben.
Ein weiteres Beispiel ist das Abschätzen von Verletzten in einer Erdbebenregion. Betrachtet man die geschätzte Anzahl von Verletzten und Toten im Erdbebengebiet von Gujarat/Indien vom 26. Januar 2001, so stellt man eine starke Diskrepanz zwischen den ersten Schätzungen und den inzwischen öffentlichen Zahlen fest. Die Regierung ging bei ersten Schätzungen von wenigen hundert Toten und Verletzten aus. Im Laufe weniger Tage wurde die Zahl kontinuierlich nach oben korrigiert. Inzwischen geht man von wenigstens 20000 Toten und mehr als 165000 Verletzten aus. Auch wenn die ersten Zahlen womöglich politisch motiviert waren, so ist es zumindest für internationale Rettungskräfte wichtig, eine genauere Vorstellung über die Anzahl der Toten und Verletzten zu haben, um rechtzeitig die notwendigen Mittel zur Verfügung zu stellen.

Ein mögliches Modell könnte beispielsweise in Abhängigkeit von der Tageszeit, den Aufenthaltsorten je Zeit, den Gebäudetypen je Ort und den Einsturzwahrscheinlichkeiten der einzelnen Typen eine grobe Abschätzung liefern (Ender 1998). Diese dreistufige Modellierung benötigt bedingte Wahrscheinlichkeiten, die nicht trivial zu schätzen sind. Ein möglicher Ansatz ist es, den Tag in drei Phasen einzuteilen: Berufsverkehrszeiten morgens/abends, Schlafenszeiten, der Rest. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten sind durch Zählungen und Umfragen oder auch durch Expertenschätzungen näherbar. Ebenso verfährt man mit den Gebäudetypen. Die Einsturzwahrscheinlichkeiten sind nur vage zu beschreiben. Demzufolge sind Schlüsse aus diesem Modell mit viel Ungenauigkeit behaftet. Trotzdem lassen sich aufgrund der Modellierung Größenordnungen abschätzen. Allerdings müssen zur Auswertung Schätzfehler und Modellfehler berücksichtigt werden.
Anstelle eines einfachen Schätzintervalls für die Ausgabewerte entwickeln wir ein Verfahren, dass die Plausibilität der geschätzten Werte analysiert. Dies führt zu dem Begriff der unscharfen Wahrscheinlichkeit. Die mathematischen Grundlagen und die mathematische Beschreibung hierzu sind im folgenden Abschnitt angegeben. Im Abschnitt „Semantik der Fuzzy Wahrscheinlichkeiten“ beschreiben wir, wie man mit unscharfen Wahrscheinlichkeiten Ereignisse bewertet.

Mathematische Grundlagen

Seit ca. 1900 gibt es in der Mathematik eine Bestrebung das Fundament der Mathematik neu zu definieren. Ziel ist es alle bekannten mathematischen Sätze auf wenige nicht beweisbare Behauptungen, sogenannte Axiome, zurückzuführen. Für unseren Zahlenraum gibt es zum Beispiel das Axiome der Kommutativität (a+b=b+a). Die heute akzeptierten Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung wurden von Kolmogorov 1933 postuliert. Sie sind in Anlehnung an die Eigenschaften relativer Häufigkeiten definiert:

1. Jedem zufälligen Ereignis A ist eine Zahl *P(A)* mit 0=*P(A)*=1 zugeordnet. *P(A)* heißt die Wahrscheinlichkeit von A.
2. Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Experiments ist eins (*P(?)*=1).
3. (Additivität) Sind abzählbar viele zufällige Ereignisse A_1, A_2, ... paarweise unvereinbar, so ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Einzelereignisse gleich der Wahrscheinlichkeit des vereinigten Ereignisses: $\sum P(A_i) = P(\bigcup A_i)$

Die Qualität der statistischen Analyse hängt im wesentlichen von den Daten ab. Je stärker das Rauschen um so schlechter die abgeleiteten Aussagen. Für eine Prognose benötigt man außerdem noch die Annahmen, das die Verteilung der Daten konstante Verteilung über die Zeit ist. Bei vielen Anwendungen ist diese Annahme leicht zu überprüfen. Beispiele sind das Roulette und ähnliche Glücksspiele, Verkehrsflussanalysen. In vielen Bereich ist die Annahme von stationären Zufallsereignissen jedoch nicht gegeben. Um dem abzuhelfen, gibt es in der Statistik Standardmethoden wie Trendbereinigung. Ein bekanntes Beispiel sind Finanzdaten, die häufig einem Wachstumsprozess unterliegen. Aber auch im Bereich Naturkatastrophen ist die Annahme nicht zutreffend. So ist aufgrund der globalen Erwärmung der Erde das zukünftige Auftreten von Winterstürmen in Europa sicherlich mit einer anderen Verteilung zu modellieren, als es aus den historischen Daten ersic htlich ist. Aber wie soll hier ein Trend ermittelt werden?
Um die Fehler des Ansatzes offen zulegen, modellieren wir hier mit unscharfen Wahrscheinlichkeiten. Wir erhalten eine Axiomatik für unscharfe Wahrscheinlichkeitsrechnung in Anlehnung an die kolmogorovschen Axiomatik:

i. Jedem zufälligen Ereignis A ist eine Funktion μ_A zugeordnet, so dass gilt: 0 = μ_A(x) =1. μ_A heißt die unscharfe (fuzzy) Wahrscheinlichkeit von A.

ii. Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Experiments ist: $\mu_?(x)=1$ für x = 1 sonst 0

iii. Subadditivität: Sind abzählbar viele zufällige Ereignisse A_1, A_2, ... paarweise unvereinbar so ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Einzelereignisse kleiner gleich der Wahrscheinlichkeit des vereinigten Ereignisses.

An dieser Stelle gilt es zu klären, wie unscharfe Wahrscheinlichkeiten verknüpft werden. Dazu dient das heute weitverbreitete Konzept der unscharfen Mengen, zu denen auch unscharfe Wahrscheinlichkeiten gehören. Es wurde von L. Zadeh **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**) in den 60ern entwickelt und entstammt der Regelungstechnik. Das Grundprinzip beschreibt wie man linguistische Begriffe wie ‚meistens', ‚häufig', ‚groß', ‚teuer' modelliert, ohne feste Grenzen zu benutzen. Es ist eine Weiterentwicklung der mehrwertigen Logik von Lukasiewisz aus den 20ern. So kann man mittels mehrwertiger Logik Aussagen nicht nur mit richtig und falsch, oder binär mit null und eins, bewerten, sondern mit Werten einer Menge mit endlich oder unendlich vielen Elementen. Üblich ist das Intervall [0,1]. Die Aussage ‚eine Frau mit einer Körpergröße von 1,60 Meter ist groß' könnte den Wahrheitswert 0.6 haben.
In der mehrwertigen Logik gibt es nur die Quantoren ‚Nicht', ‚Für Alle' und ‚Es gibt'. Unscharfe Logik fügt weiter hinzu z.B. ‚Meistens', ‚Fast immer'... . So modelliert man mit unscharfer Logik Aussagen wie ‚Meistens ist es im Sommer warm'. Mit einer binären scharfen Logik wäre das schwerer zu beschreiben.
Typische Anwendungsgebiete sind Regelwerke zur Repräsentationen von Wissen. Besonders in der Medizin erfreuen sie sich großer Beliebtheit, da in diesem Bereich präzise Aussagen selten existieren. Jeder Patient reagiert und empfindet anders. Das Standardvorgehen ist in Abb. 1 dargestellt. Man definiert Begriffe, hier *langsam*, *schnell* ..., und weist ihnen anschließend Möglichkeitswerte zu. So ist ein Puls mit 60 *normal* mit Möglichkeitswert 0.8 und *langsam* mit Möglichkeitswert 0.2.

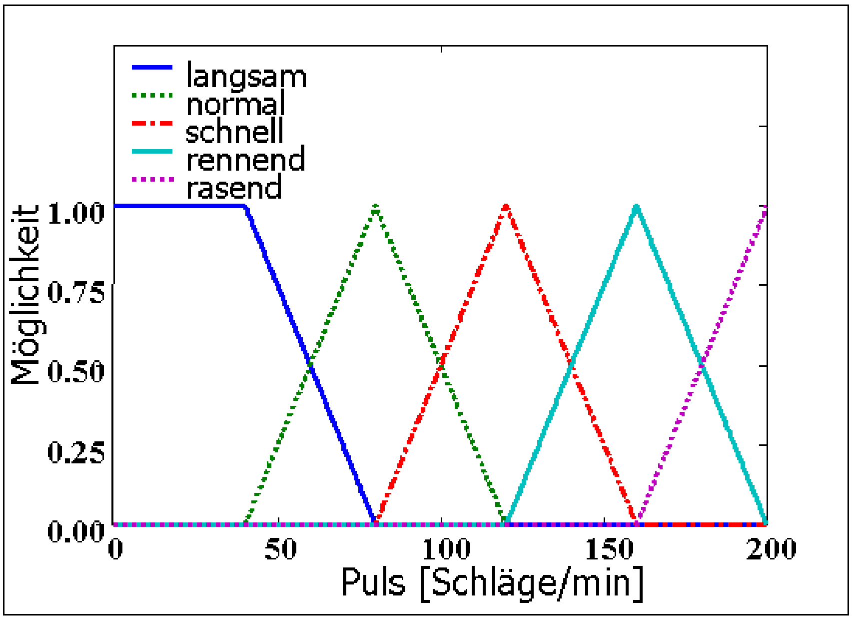

Abb. 1

Gleiches wird für mehrere linguistische Variablen gemacht, um dann mit Hilfe von *Wenn Dann Regeln* Schlüsse ableiten zu können, z.B. *WENN* Puls rasend *UND* Alter alt, *DANN* Patient gefährdet.

Für die Operatoren *und, oder, nicht, wenn-dann* gibt es Rechenregeln, die unter anderem bei (Klier et al. 1988) angegeben sind.

Semantik der Fuzzy Wahrscheinlichkeiten

Es gibt kein Standardverfahren zum Ableiten von Möglichkeitsverteilung. Die meisten Anwendungen, im Besonderen bei regelungstechnischen Problemen, verwenden Expertenschätzungen zur Initialisierung der unscharfen Mengen. Anschließend werden sie mit modernen Verfahren des soft computing angepasst. Besonders prominent sind Neuro Fuzzy Systeme. Dort wird die Adaption mit neuronalen Netzen vorgenommen. Allerdings benötigt man zum Durchführen der Adaption eine große Anzahl von Trainings- und Validierungsdaten.

Im Falle der Risikoabschätzung für Naturkatastrophen ist ein derartiges Verfahren nicht möglich, da die Anzahl der bekannten Fälle zu gering ist. Stattdessen integrieren wir verschieden Informationsquellen, Schätzungen mit dem Kontext Mode (Gebhardt 1992). Betrachtet man die unscharfen Mengen als Resultate einer Expertenumfrage, wobei jeder Experte eine Intervallschätzungen abgab, so ist der Möglichkeitswert als Unterstützungsmaß interpretierbar. Ähnlich der relativen Häufigkeiten bei Punktschätzungen die zu Wahrscheinlichkeitsverteilungen führen, ergeben sich so Möglichkeitsverteilungen.

In unserem Fall haben wir verschiedene Arten von ‚Experten'. Wir können heterogene Information aus numerischen Modellen, Simulationen, Szenarioanalysen integrieren. Um die Transparenz zu erhalten, verwenden wir keine Punktschätzung, sondern, wie bereits erwähnt, Intervallschätzungen. Des weiteren modellieren wir Ereignisse mit verschiedenen Verteilungsannahmen und benutzen Konfidenzintervalle. Beispielsweise gibt es keinen Grund Wiederkehrperioden von Stürme nur mit Weibullverteilungen zu modellieren (Woo 1999 und Johnson et al. 1994). Verwendet man außerdem noch weitere Extremwertverteilungen wie Log-Normalverteilungen und Paretoverteilungen (Johnson et al. 1994) zum Schätzen eines hundertjährigen Ereignisses, erhalten wir ein Bild, das vollständiger ist als eine einfache Punktschätzung.

In einem nächsten Schritt können wir dann zusätzlich Expertenschätzungen integrieren. In diesem Zusammenhang verstehen wir unter „Expertenschätzungen" subjektive Meinungen, Einschätzungen und Erfahrungswerte von Experten. Dazu benutzen wir ebenfalls Intervallschätzungen oder unscharfe Mengen, denn eine Punktschätzung würde eine Genauigkeit vortäuschen, die in der Realität nicht vorhanden ist. Auf diese Art erhalten wir eine unscharfe Menge, die eine nachvollziehbare Semantik hat und numerisch fundiert ist. Typischerweise sind unscharfe Mengen , die mit einem Kontextmodell erzeugt werden Treppenfunktionen, s. Abbildung 2. Bei Bedarf kann man die Treppenfunktion mit linearen Funktionen glätten und mittelt möglicherweise Fehler aus.

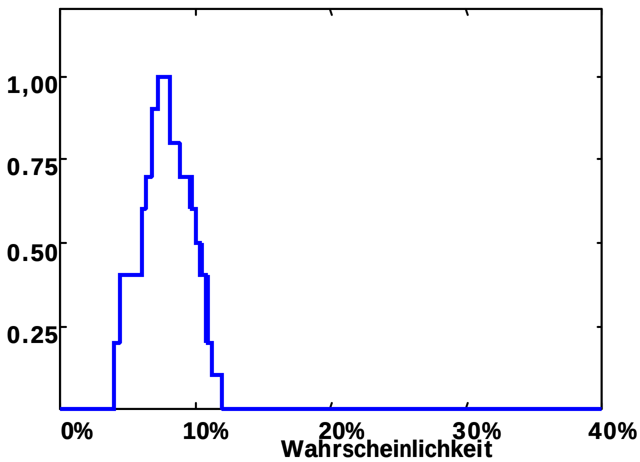

Abb. 2: Fuzzy Wahrscheinlichkeitsschätzer.

Eine Anwendung ist unter anderem in der Versicherungswissenschaft denkbar. Zum Berechnen von Prämien verwendet man dort so genannte Schaden-Häufigkeits Kurven. Die berechnete Prämie entspricht der Fläche unter der Kurve (s. Abb. 3)

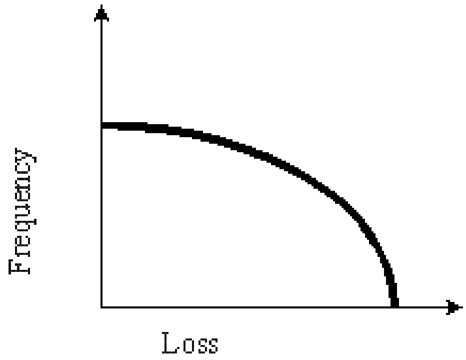

Abb. 3

Zum Berechnen dieser Kurven schätzen wir zukünftige Schäden mit Hilfe eines probabilistischen Modells. Je nach Zusammensetzung des zu versichernden Portfolios, also der versicherten Werte, sind unterschiedliche Annahmen der Wahrscheinlichkeitsverteilungen nötig. Im Falle von Schäden, die durch Naturkatastrophen hervorgerufen werden, ist die Frage nach der richtigen Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht eindeutig zu beantworten. Statt einer Kurve muss eine Kurvenschar berechnet werden. Außerdem berücksichtigen wir, dass beim Schätzen eines Wahrscheinlichkeitsmodells weitere Fehler entstehen, und dass man diese am Besten durch Angabe von Konfidenzintervallen anstelle von Punktschätzungen kompensiert. So erhalten wir eine Schaden-Häufigkeits Wolke. Jedem Punkt der scharfen Kurve entspricht eine Möglichkeitsverteilung. (s. Abb. 4).

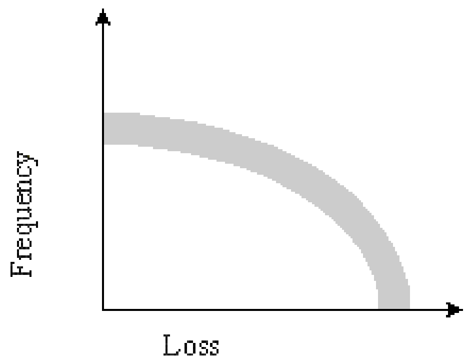

Abb. 4

Die abgeleitete Prämie ist dann nicht mehr durch eine feste Zahl gegeben, sondern wird ebenfalls durch eine Möglichkeitsverteilung repräsentiert. Dieser Vorteil zahlt sich bei der Prämienverhandlungen mit Kunden aus. Die Verhandlungsspielräume sind mit dieser Methodik mathematisch-modelltheoretisch fundiert und nicht wie bisher rein qualitativ.

Zusammenfassung

In diesem Papier konnten wir zeigen, dass unscharfe Wahrscheinlichkeiten im Besonderen beim Abschätzen von Wahrscheinlichkeiten für Extremwertereignisse ein geeignetes Mittel sind. Wir können mit dieser Methodik die Unschärfen der Schätzung darstellen und verstecken sie nicht hinter fehlerbehafteten Punktschätzungen. Anhand eines Beispiels aus der Versicherungswissenschaft stellten wir eine Methode vor, wie wir Möglichkeitsverteilungen bestimmen können. Ein Problem, das im Falle von unscharfen Reglern, mit neuronalen Netzen und genetischen Algorithmen gelöst wird. Allerdings benötigen diese Verfahren eine breite Datenbasis und diese ist bei extremen Ereignissen wie Naturkatastrophen nicht gegeben.
Betrachten wir abschließend das Eingangsbeispiel, das Abschätzen von Wiederkehrperioden von Erdbeben in Deutschland, so ist die Methode der unscharfen Wahrscheinlichkeiten geeignet, Gefahren zu erkennen, die durch eine einfache statistische Analyse versteckt blieben. Verschiedene Verteilungsannahmen werden bewertet und können zu einem unscharfem Schätzer integriert werden.

Danksagung

Diese Arbeit wurde am Institut für Programmstrukturen und Datenorganisation der Fakultät für Informatik an der Universität Karlsruhe unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. G. Goos durchgeführt. Sie wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) im Rahmen des interdisziplinären Graduiertenkollegs Naturkatastrophen gefördert.

Literatur

Ender, P., 1998: Erstellung eines Modells zur Simulation von Primärschäden nach Starkbeben. Diplomarbeit am IMB der Universität Karlsruhe (TU).
Bronstein und Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik. Verlag Harri Deutsch.
Yager, Ovchinnikov, Tong und Nguyen, 1987: Fuzzy Sets and Applications: Selected papers by L.A. Zadeh. Wiley-Interscience Publiication.
Klier und Folger, 1988: Fuzzy Sets, Uncertainty and Information. Prentice Hall.
Gebhardt und Kruse, 1992: A possibilistic Interpretation of Fuzzy Sets in the Context Model. Proc. 1st IEEE Conf. on Fuzzy Systems, pp. 1089-1096.
Woo, G., 1999: The Mathematics of Natural Catastrophes. Imperial College Press.
Johnson, N. L. und S. Kotz, 1994: Continous Univariate Distributions. New York Wiley.